№ 1 | январь 2020

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 1
январь 2020

САМОЗАПУСКАЮЩИЙСЯ СИФОН

КАРТИНКИ ВЫЧИСЛЯЮТ БЕСКОНЕЧНЫЕ СУММЫ

НАИВНАЯ ФИЗИКА

Enter

По традиции к Новому году мы выпустили календарь
с интересными задачами-картинками из журнала «Квантик»

Приобрести календарь можно в интернет-магазинах **kvantik.ru, biblio.mccme.ru**
и других магазинах – подробнее по ссылке **kvantik.com/buy**

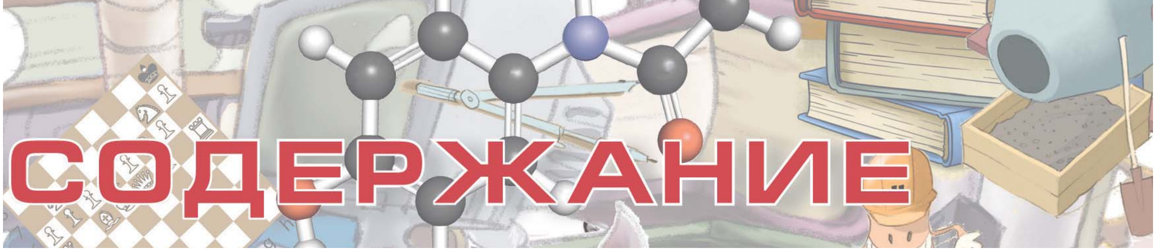
www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 1, январь 2020 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, И. А. Маховая, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

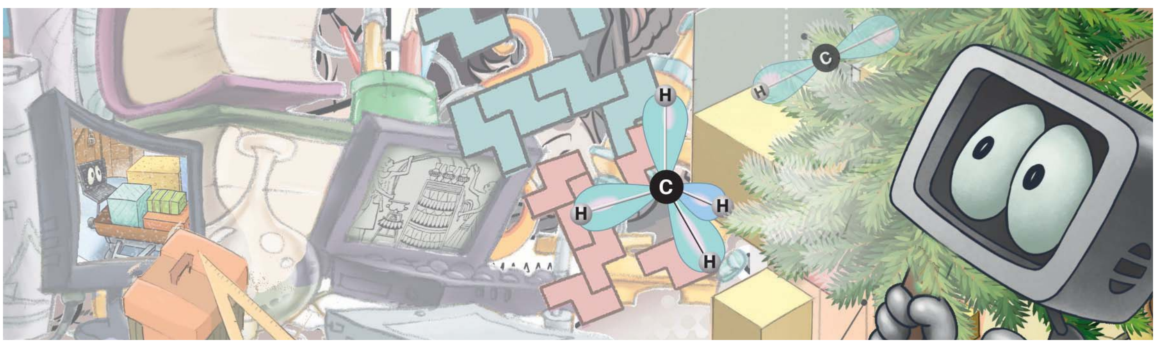
Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка
на сайте агентства «Роспечать» **press.rosp.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 05.12.2019
Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-Столица-8»
Тел.: (495)363-48-84
http://capitalpress.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+



СОДЕРЖАНИЕ



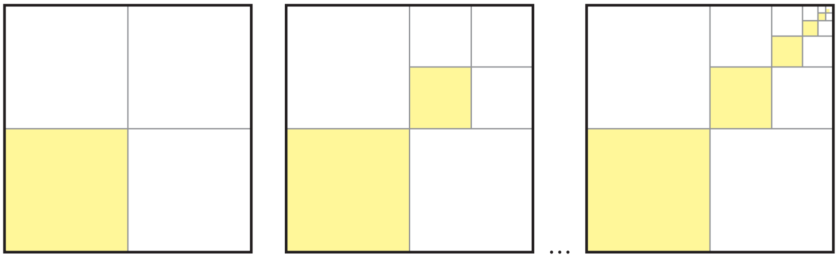
СМОТРИ!

Материал подготовил
Григорий Мерзон

КАРТИНКИ ВЫЧИСЛЯЮТ БЕСКОНЕЧНЫЕ СУММЫ

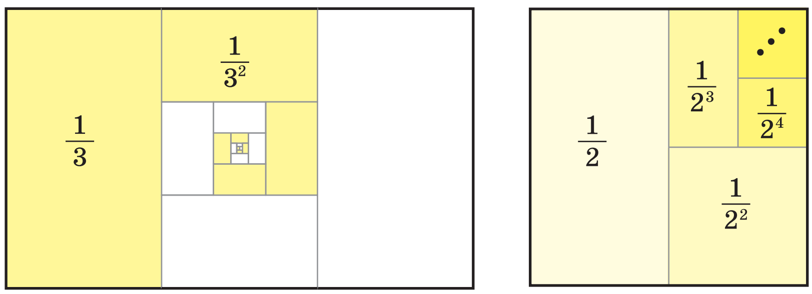
Как найти сумму нескольких слагаемых? Странный вопрос – бери и складывай одно за другим! Но что делать, если речь идёт о сумме *бесконечного* числа слагаемых? Оказывается, иногда полезно эту сумму... нарисовать.

Начнём с суммы $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$ (это сумма *геометрической прогрессии*: каждое следующее слагаемое в 4 раза меньше предыдущего). Возьмём квадрат единичной площади. Закрасим его четверть, потом добавим четверть от четверти...

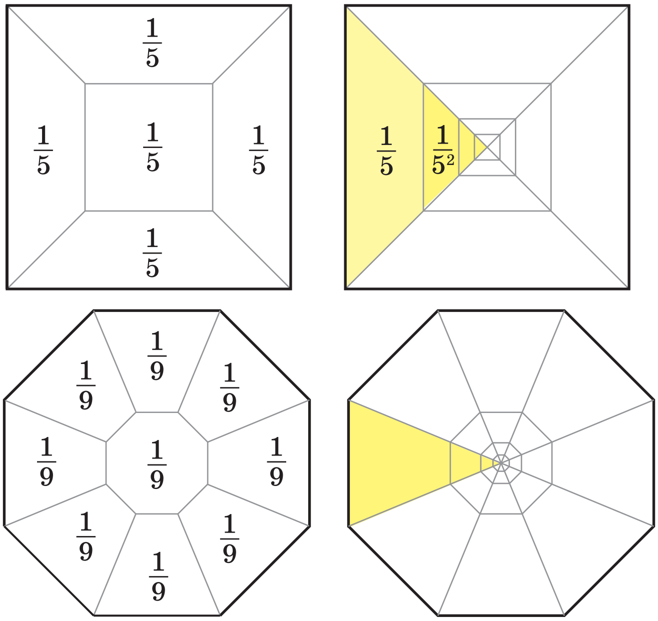


Видно, что *в итоге* закрашена ровно $1/3$ площади квадрата – жёлтая часть имеет такую же площадь, как и каждая из двух белых частей.

Можно похожим образом найти суммы $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$ и $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ (поняли, чему эти суммы равны?)

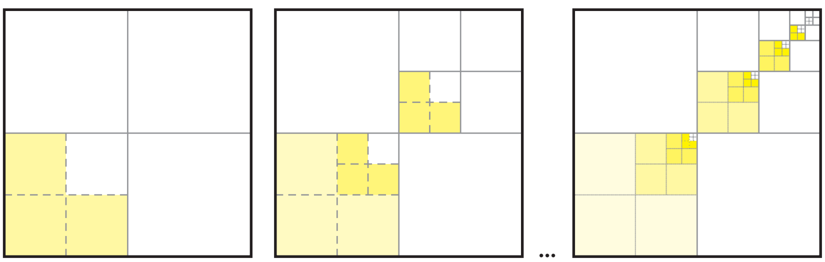


Есть и довольно общий способ подсчитать сумму геометрической прогрессии $\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\ldots$ для любого целого $q>1$. Ниже он показан для $q=5$ и $q=9$.



Мы начинаем с правильного $(q-1)$-угольника, рисуем внутри следующий правильный $(q-1)$-угольник, имеющий площадь в q раз меньше предыдущего – то есть такую же, как каждая из $(q-1)$ примыкающих к нему трапеций, и т.д. Видно, таким образом, что эта сумма равна $\frac{1}{q-1}$.

Можно геометрически найти и некоторые более сложные суммы. Например, ниже объясняется, что $1\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{3}{64}+\ldots=\frac{4}{3}$ (большой квадрат имеет площадь 4).

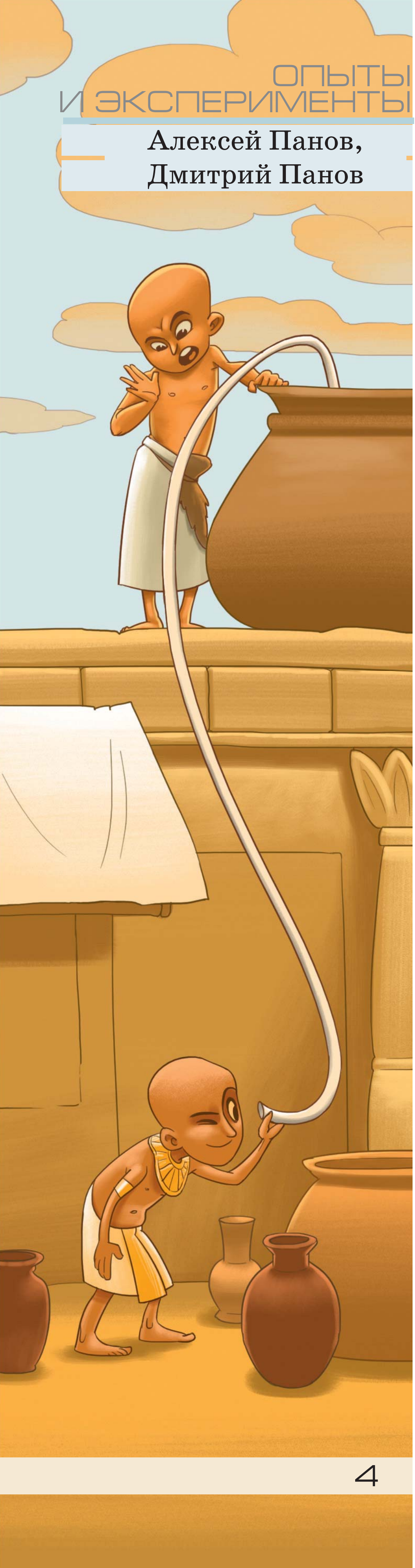


$1\cdot\frac{3}{4}$ $\qquad$ $1\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{16}$ $\qquad$ ... $\qquad$ $1\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{3}{64}+\ldots=\frac{4}{3}$

Теперь мы знаем, чему равна сумма $\frac{1}{q}+\frac{2}{q^2}+\frac{3}{q^3}+\ldots$ для $q=4$. Быть может, вы придумаете геометрические вычисления таких сумм для других q? Подумайте и про другие суммы – например, $\frac{1}{q}+\frac{3}{q^2}+\frac{6}{q^3}+\frac{10}{q^4}+\ldots$ (если в знаменателе q^n, то в числителе стоит сумма всех натуральных чисел от 1 до n).

Художник Алексей Вайнер

Алексей Панов,
Дмитрий Панов



САМОЗАПУСКАЮЩИИЙСЯ СИФОН

Брюс Йини – учитель физики

Брюс Йини – наверняка самый известный учитель физики. Его YouTube-канал «Наука своими руками» (Homemade Science with Bruce Yeany) насчитывает миллионы посещений. В своём предисловии к каналу Йини пишет:

... Я понял, что самостоятельное обдумывание эксперимента и изготовление своего собственного оборудования научили меня больше, чем любой прослушанный мною курс физики. Я надеюсь, что вы последуете за мной на этом пути ...

Наш текст написан как раз по мотивам одного из последних видео Йини под названием «Сифоны».

Рисунок 1 – это прорисовка настенного изображения, датируемого вторым тысячелетием до нашей эры. Он свидетельствует, что египтяне уже тогда активно использовали сифоны в бытовых целях.

Рис. 1. Египтяне, использующие сифоны

Вы, конечно, знаете, что с помощью сифона можно перелить жидкость из высоко стоящего сосуда в низко стоящий. Один из египтян на рисунке держит в правой руке две трубки, через которые жидкость уже переливается. В левой руке он держит трубку, через которую втягивает жидкость из ещё одного верхнего сосуда.

Трубку надо обязательно заполнить жидкостью, прежде чем поместить её конец в нижний сосуд, иначе жидкость не потечёт. На рисунке 2 мы демонстрируем другой метод заполнения трубки.

Рис. 2. С помощью шприца заполняем трубку, чтобы привести сифон в рабочее состояние

А наше видео по ссылке kvan.tk/siphon показывает одновременно и процесс заполнения сифона, и его работу по переливанию жидкости.

Герон Александрийский

Первый учебник по изготовлению и применению различных типов сифонов написал Герон Александрийский, живший в I веке нашей эры.

В этой книге под названием «Пневматика», кроме прочего, содержится описание паровой турбины, автомата по продаже воды, механизма автоматически открывающихся дверей, а также шприца, аналогичного тому, каким мы закачивали воду в сифон.

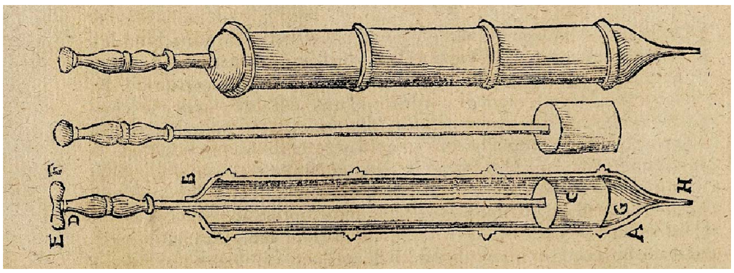
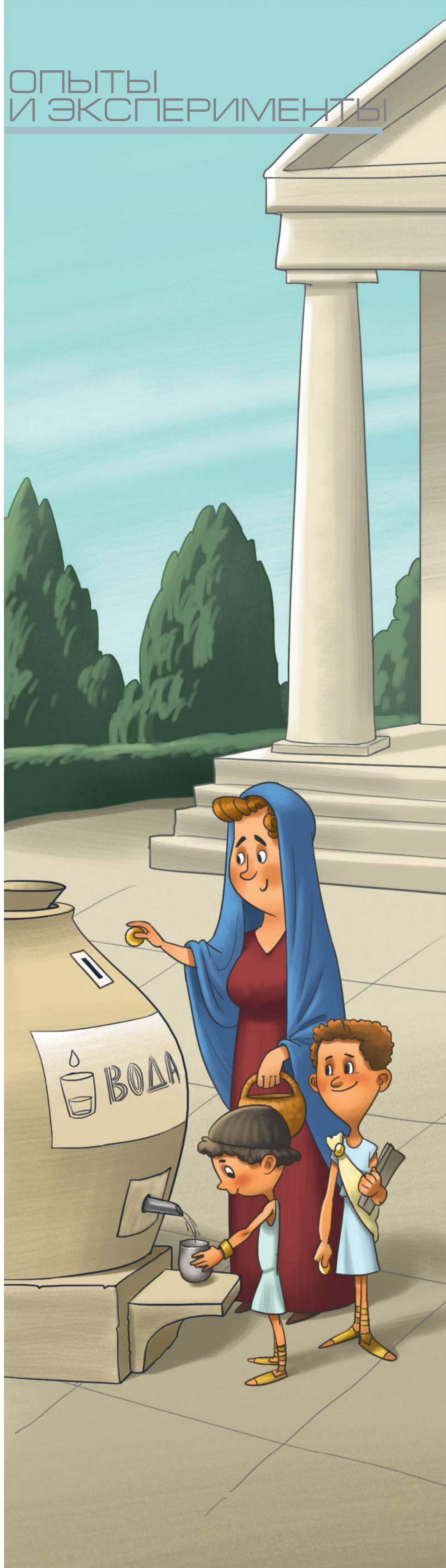


Рис. 3. Шприц из «Пневматики»

Среди многочисленных сифонов, описанных в «Пневматике», есть и такие, которые не требуют для своей работы специального наполнения водой. Вот один из них (рис. 4).



Трубка здесь почти целиком содержится в верхнем сосуде. Только её нижний кончик пронизывает дно сосуда. Пока в сосуде не очень много жидкости, сифон работать не будет. Но как только уровень жидкости станет выше верхнего сгиба сифона, обозначенного буквой ϑ, сифон заработает и сосуд опорожнится почти полностью, до уровня конца трубки, обозначенного буквой к.

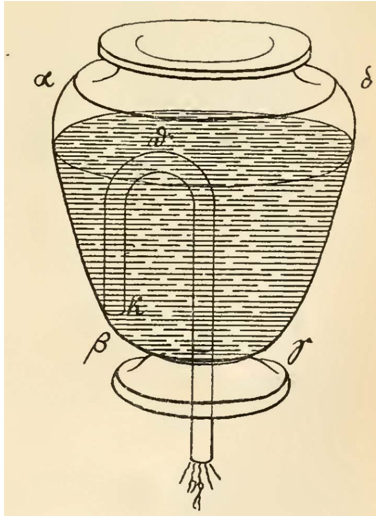


Рис. 4. Самозапускающийся сифон из «Пневматики»

Для проведения такого эксперимента нам сейчас кроме пластикового стаканчика и пластиковой трубочки ничего и не понадобится (рис. 5).

Рис. 5. Самозапускающийся сифон в момент полного опорожнения; трубка выходит через отверстие в дне стакана

На видео по ссылке kvan.tk/tantalus продемонстрирована работа этого сифона.

Похоже, что подобные самозапускающиеся сифоны пользовались большой популярностью в Древнем Риме. В 2012 году в хорватском городе Винковци в ходе археологических раскопок был найден римский клад IV века. Всего было обнаружено 48 предметов. Один из них – большая позолоченная серебряная чаша, в центре которой на выступающем камне сидит человек, с устремлёнными ко дну руками.

Рис. 5. Чаша Тантала
из Винковци

Археологам удалось разобраться с устройством и назначением этой чаши и отождествить сидящего человека с Танталом. Вот как описывает Одиссей, спустившийся в царство Аида, страдания, наказанного богами Тантала.

Видел потом я Тантала,
казнимого страшною казнью:
В озере светлом стоял он по горло в воде и, томимый
Жаркою жаждой, напрасно воды
захлебнуть порывался.
Только что голову к ней он склонял, уповая напиться,
С шумом она убегала; внизу ж под ногами являлось
Чёрное дно, и его осушал во мгновение демон. [1]

Чаша символизирует страдания Тантала. Внутри центрального камня скрыт самозапускающийся сифон. Когда чаша заполняется и жидкость начинает подбираться к рукам Тантала, сифон срабатывает и чаша опустошается – Тантал не может утолить свою жажду.

Считается, что на самом деле эта чаша служила римлянам для развлечений. Когда на пиру неосторожный гость наливал в чашу больше положенного, она опорожнялась ему на ноги, и это веселило всех присутствующих.

Сейчас подобные керамические поделки продаются повсюду, особенно в Греции. У них есть ещё пара названий – *чаша Пифагора* и *жадная чаша*. Чтобы лучше познакомиться с внутренним устройством чаши Тантала, посмотрите видео Pythagorean or Tantalus Cup, где гончар Джон Бритт (John Britt) демонстрирует своё мастерство и создаёт такую чашу, начиная с нуля.

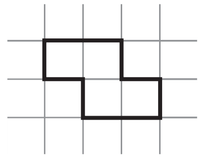
Ну а потом зайдите на Homemade Science, отыщите там видео Siphons, посмотрите его, а также другие видео, и убедитесь, насколько был прав Брюс Йини, говоря о преимуществах своего подхода к изучению физики.

[1] Гомер, «Одиссея» (перевод В.А. Жуковского)

Художник Мария Усеинова

Парадокс укладки Z-тетрамино в квадраты

Владимир Ковальджи

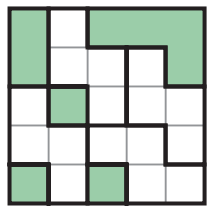


Вполне очевидно, что никакой клетчатый квадрат нельзя разрезать по линиям клеточек на фигурки Z-тетрамино весь без остатка. «Зигзаг» – фигурка кривая, неудобная, замостить ею квадрат целиком невозможно. Но сколько именно «лишних» клеток останется в самом лучшем случае? И как это зависит от размеров квадрата?

Скорее всего, большинству людей интуиция подскажет, что неизбежно останется «несколько» клеток. Что в очень большом квадрате мы почти по всей площади квадрата уложим наши зигзаги плотно, как паркет, и только где-то по углам мы столкнёмся с неприятными «краевыми эффектами», не позволяющими обойтись без лишних клеток. И что с увеличением размеров квадрата число этих лишних клеток вряд ли сильно вырастет. Углов-то у любого квадрата ровно четыре...

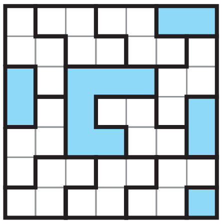
Итак, задача:

У нас есть клетчатый квадрат 2019×2019. Какое минимальное число лишних клеток может остаться после вырезания из него максимально возможного числа Z-тетрамино?

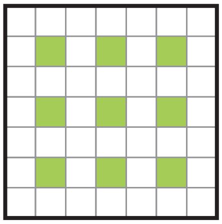


Попробуем для начала квадраты поменьше. В квадрате 3×3 умещается лишь одна фигурка. В квадрате 4×4 – три. В квадрате 5×5, как ни старайся, не получается уместить более четырёх. Что-то многовато лишних клеток остаётся – целых 9, то есть более чем на две фигурки ещё.

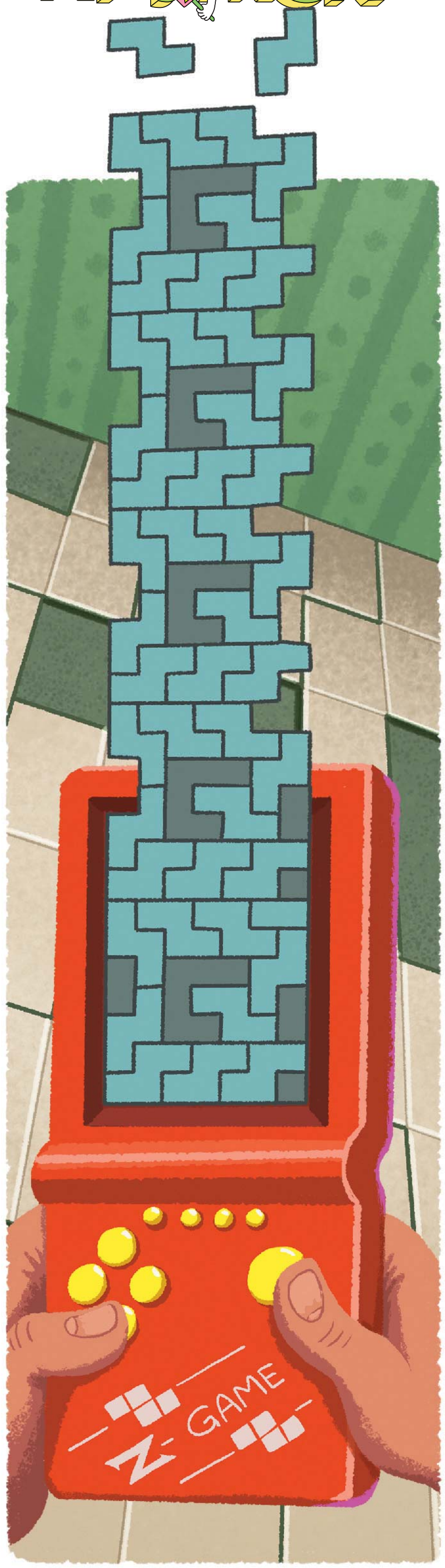
В квадрате 6×6 запросто умещаются 8 зигзагов, и остаются 4 лишние клетки – результат даже лучше, чем в квадрате 5×5! Впрочем, в квадрате 4×4 тоже осталось меньше, чем в 3×3 – четыре против пяти. Скорее всего, «чётные» квадраты явно удобнее для наших фигурок, и это легко объяснимо. Но главный вопрос – как зависит количество лишних клеток от размеров квадрата вообще (например, если рассматривать только «нечётные» квадраты)?



Возьмём квадрат 7×7. Можно попробовать самые разные варианты укладки, но увы – больше девяти фигурок никак не помещается (то есть 13 клеток остаются лишними). Поскольку перебрать все варианты укладки тут уже затруднительно, необходимо как-то строго доказать, что это действительно предел.



Тут приходит на помощь типичный для подобных задач метод раскраски. Если в нечётном квадрате (например, 7×7) покрасить некоторые клетки так, как показано на рисунке, то в любую фигурку Z-тетрамино обязательно попадёт зелёная клетка, и, следовательно, фигурок не может быть больше, чем таких клеток. Пример, когда фигурок ровно столько, сколько зелёных клеток, легко строится (нарисуйте его!).



Поскольку такая раскраска подходит для любого нечётного квадрата, можно решить задачу в общем виде. Если сторона квадрата $2n-1$, то зелёных клеток будет $(n-1)^2$. Из площади квадрата вычтем число зелёных клеток, помноженное на 4, и получим ответ:

$$(2n-1)^2-4(n-1)^2=4n-3.$$

И вот тут становится ясно, что интуиция на сей раз нас очень сильно подвела. Оказывается, в квадрате 2019×2019 при разрезании на зигзаги неизбежно останется минимум 4037 лишних клеток! Совершенно неожиданный результат. Кажется невероятным, что такое огромное число клеток – четыре тысячи! – никак не удастся как-нибудь так сгруппировать, чтобы вырезать из них хотя бы ещё одну фигурку...

Что касается чётных квадратов со стороной $2n$, то легко показать масштабируемую конструкцию, при которой остаётся $2n+2$ либо $2n$ лишних клеточек (в зависимости от делимости на 4). Что, конечно, экономнее, но всё равно количество лишних клеточек растёт прямо пропорционально стороне квадрата, становясь сколь угодно большим вопреки первоначальному интуитивному предположению.

Художник Евгений Паненко

ВЕЛИКИЕ УМЫ

ЛАЙНУС ПОЛИНГ

Марина Молчанова

Лайнус Карл Полинг
(Linus Carl Pauling)
28.02.1901–19.08.1994

За всё время существования Нобелевской премии лишь четыре человека получили её дважды. Это биохимик Фредерик Сенгер (см. «Квантик» №9 за 2019 год), физик Джон Бардин, Мария Кюри и Лайнус Полинг. Правда, вторая Нобелевская премия Полинга была премией мира – то есть, по мнению учёных, не совсем настоящей. Но и она была присуждена Полингу за действительно важную и результативную борьбу. А количество его достижений в химии потянуло бы не на одну, а на несколько премий – трудно уверенно сказать, кто более и кто менее великий, но Полинг был уж точно самым разносторонним химиком XX века. И ещё он единственный, кто получил обе Нобелевские премии единолично, без обычного деления между двумя-тремя лауреатами.

Лайнус родился в американском городе Портленде, штат Орегон. Он блестяще учился в школе и очень рано поступил в колледж, где получил высшее образование. Любопытно, что в школе он не успел сдать пару курсов истории, и школьный диплом ему решились выдать уже после Нобелевских премий. После колледжа учился в аспирантуре Калифорнийского технологического института, знаменитого Калтеха, ставшего местом его работы на десятки лет. В конце 20-х годов он съездил в Европу, где как раз начиналось бурное развитие «новой физики» (квантовой) – а значит, и «новой химии». И это определило основное направление его научных интересов на многие годы вперёд.

Лайнус Полинг (слева).
Калтех, 1939 г.

АТОМЫ, СВЯЗИ, МОЛЕКУЛЫ

Говорят, что если идеи учёного удостоились строчки в школьном учебнике, то он наверняка гений. Тогда Полинга можно назвать многократным гением, поскольку не одна и не две строчки, а значительная часть школьных учебников по химии – это именно те представления, которые он ввёл в науку. Конечно, тут некоторые подростки захотят Полинга проклясть: школьная химия не слишком популярна, и многие считают её сложноватой. Но могло быть гораздо хуже: скажем, метод молекулярных орбиталей, развитый

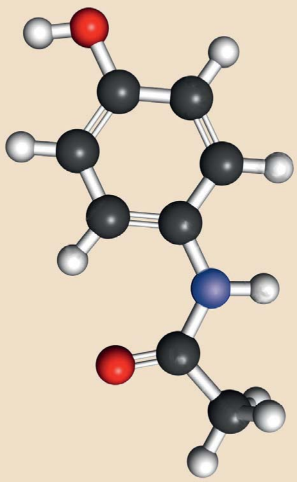
Малликеном для описания молекул, точнее и полнее, но и понять его намного сложнее.

Теория Полинга, хотя и основана на квантовых расчётах, оставляет нам возможность пользоваться удобными и привычными для нас моделями молекул – как будто собранными из конструктора.[1] Атомы – узлы конструкции, а некоторые пары атомов соединены «стержнями» – химическими связями. Химическая связь между двумя атомами образуется за счёт их электронов: либо один атом отдаёт свой электрон другому (*ионная связь*), либо каждый из них «вкладывает» по одному электрону и у атомов получается общая пара электронов (*ковалентная связь*).

И вот тут сразу первая важная вещь, введённая Полингом: чисто ионная и чисто ковалентная связи – это крайние случаи, а чаще бывает их смесь, когда образуется общая электронная пара, но один из атомов частично оттягивает общие электроны на себя (*ковалентная полярная связь*). А вот кто и насколько сильно «тянет одеяло на себя» – это зависит от ещё одной характеристики атомов, которую также определил Полинг: от *электроотрицательности*. Само понятие, правда, существовало уже давно, но именно Полинг первый придумал для него удобный метод расчёта и создал шкалу, которая используется по сей день. Простейший пример: электроотрицательность кислорода намного больше, чем водорода ($3{,}44 > 2{,}20$), – значит, в молекуле воды H_2O именно кислород перетягивает на себя электроны, и на его атоме поэтому формируется отрицательный электрический заряд, а на атомах водорода – положительный. Это определяет многие важные свойства воды.

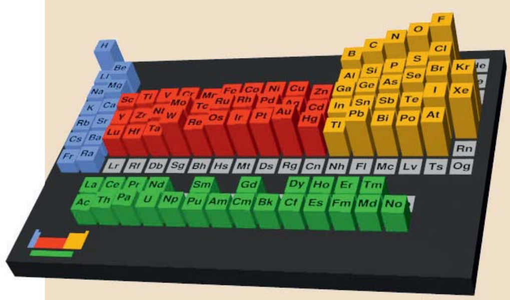
Ещё одна существенная вещь, введённая Полингом, – понятие *гибридизации*. Атомы углерода способны образовывать четыре совершенно одинаковые химические связи (как в молекуле природного

[1] Заметим: даже те цвета, которые многие поколения химиков используют в условных моделях молекул (чёрный для атомов углерода, белый для водорода, красный для кислорода, синий для азота, и так далее), восходят именно к Полингу и его соавторам.



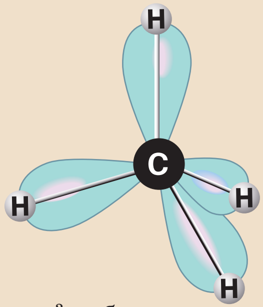
Модель молекулы парацетамола – известного лекарства

Ковалентные полярные связи в молекуле воды

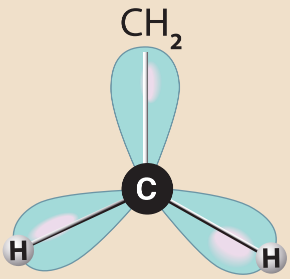


Шкала электроотрицательности по Полингу – чем выше столбик, тем больше электроотрицательность

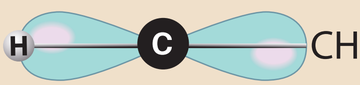
ГИБРИДИЗАЦИЯ В РАЗНЫХ МОЛЕКУЛАХ



sp^3-гибридизация в метане CH_4



sp^2-гибридизация в этилене C_2H_4



sp-гибридизация в ацетилене C_2H_2

газа, метана CH_4, изображённой здесь в верхней части рисунка). При этом специалисты по квантовой химии знают, что те четыре электрона, которые атом углерода может «вложить» в образование связей, на самом деле неодинаковы. Но, по Полингу, при образовании химических связей может происходить смешение и усреднение – это и есть гибридизация. Когда в смешении участвуют все четыре электрона (sp^3-гибридизация), итоговые связи как будто направлены из центра тетраэдра к его вершинам, когда три (sp^2-гибридизация) – как будто из центра правильного треугольника к его вершинам, когда два (sp-гибридизация) – вдоль одной линии в противоположных направлениях. На этой основе мы можем легко предсказывать и наглядно представлять пространственные структуры многих молекул.

Концепции Полинга описаны в его книге 1939 года «Природа химической связи». За 80 лет она не утратила своего значения и остаётся, пожалуй, самой знаменитой химической книгой всех времён.

КЛЕТКИ В ФОРМЕ ПОЛУМЕСЯЦА

Полинга нередко называют и одним из основателей молекулярной биологии. Ведь он первым показал молекулярную природу известной болезни.

Серповидноклеточная анемия практически не встречается в России: это болезнь африканцев и выходцев из Африки. И это одна из самых распространённых наследственных болезней в мире. У таких больных уже в возрасте нескольких месяцев возникает не только анемия (малокровие), но и боли, частые инфекции, отёки, воспаления, проблемы с сердцем, лёгкими и суставами. Под микроскопом в крови больных видны красные клетки крови (эритроциты) странной формы: не обычные круглые диски с углублением в середине, а нечто изогнутое, действительно напоминающее серп или полумесяц.

Генетическая природа этой болезни была продемонстрирована в 1949 году. И в том же году Полинг с соавторами выяснили, что именно происходит в организме больных на молекулярном уровне. Оказывается, у людей с серповидноклеточной анемией гемоглобин крови имеет не совсем такие молекулы, как у здоровых людей. Причём люди, имеющие как «нормальный», так и «аномальный» гемоглобин (носители болезни), чувствуют себя хорошо и обычно ни на что не жалуются. А вот если есть только аномальный гемоглобин (такой ребёнок может родиться, если оба родителя являются носителями), то болезнь протекает тяжело. Полинг показал существование разных вариантов гемоглобина с помощью электрофореза – одного из методов, который позволяет разделять разные белки. И впервые стало понятно, что отклонение в строении молекул одного-единственного белка в организме может иметь самые серьёзные последствия.

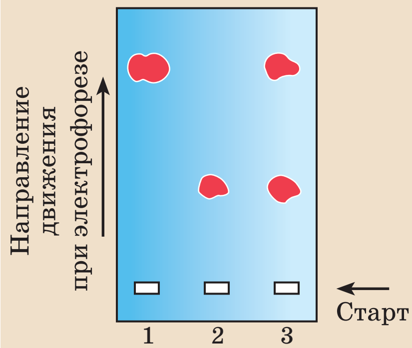
Сейчас мы уже довольно много знаем о серповидноклеточной анемии. Знаем, как именно «ошибка» в синтезе гемоглобина влияет на развитие болезни. Знаем, почему эта болезнь так распространена (оказывается, её носители сравнительно устойчивы к малярии и в условиях тропиков имеют преимущество). Знаем, как облегчить состояние больных – хотя с излечением всё сложно. Но исходным пониманием природы этой болезни мы обязаны Полингу.

СВЕРНУТЬ БЕЛОК

Главные «рабочие лошадки» в любом живом организме – молекулы белков. Это и основной строительный материал клеток, и регуляторы скорости большинства процессов, и сигнальные и транспортные молекулы. Словом, без белков никуда.

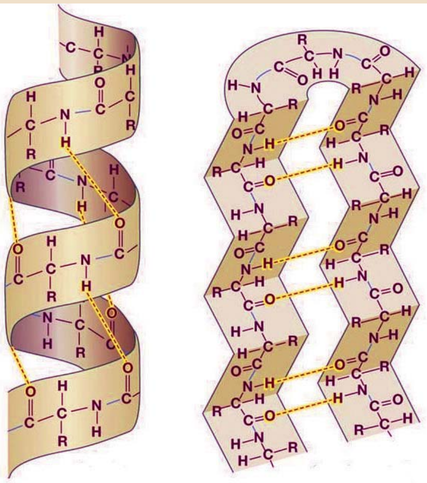
Молекула каждого белка включает в себя одну или несколько цепочек из звеньев-аминокислот. И у этих молекул есть удивительное свойство: они могут выполнять свою работу, только если цепочки приняли правильную форму в пространстве. Скажем, молекулы многих белков сворачиваются в клубочек, а некоторые образуют тонкие волокна или трубочки. Нужную форму белки в клетке принимают самостоятельно – а значит, информация о том, как именно

Нормальные эритроциты и серповидная клетка



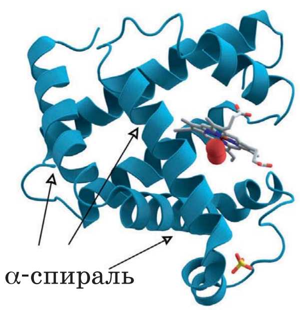
Электрофорез гемоглобина
1 – гемоглобин здорового человека,
2 – гемоглобин больного человека,
3 – гемоглобин носителя болезни.

ЛАЙНУС ПОЛИНГ

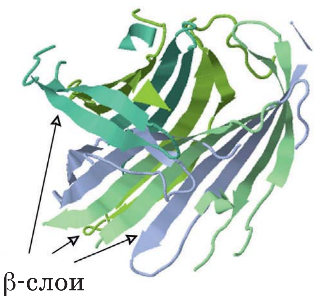


α-спираль β-слои

Жёлтым цветом обозначены водородные связи, которые стабилизируют структуру



Миоглобин



Фиброин

свернётся цепочка в условиях живой клетки, уже «зашита» в самой последовательности аминокислот.

Задача о пространственной укладке молекул белков не полностью решена до сих пор. Однако Полингу с соавторами удалось сделать первый и, может быть, наиболее значительный шаг. Они нашли способы, которыми укладываются в пространстве отдельные кусочки белковых цепей – и оказалось, что эти способы встречаются в огромном количестве самых разных белков.

Во-первых, некоторые фрагменты белковой цепи скручиваются в спираль определённого вида – биохимики называют её *α-спиралью*. Так, например, в молекуле мышечного белка миоглобина есть восемь α-спиральных участков. Во-вторых, цепь белковой молекулы может быть уложена слоями, взаимодействующими между собой; они называются *β-слоями*. На рисунке изображены α-спирали в миоглобине и β-слои в молекуле фиброина – это белок шёлка и паутины.[2]

Идеи α-спирали и β-слоёв существовали ещё до Полинга. Но он впервые построил точные и корректные модели. Говорят, что моделирование α-спирали он проводил в 1948 году во время сильной простуды, от нечего делать рисуя молекулы на листе бумаги. Потом оставалось совершенствовать расчёты и уточнять детали, и главная статья о структуре белков была опубликована в 1951 году в день его пятидесятилетия.

Сразу после успеха с белками Полинг взялся за ДНК. Но здесь его модель оказалась неверной – к огромному облегчению всех, кто занимался структурой ДНК в те же годы. Говорят, что Уотсон и Крик (будущие открыватели двойной спирали), узнав об ошибке Полинга, на радостях пошли в бар и пропустили по стаканчику: теперь у них был шанс успеть первыми. И действительно, до их основополагающего открытия оставались считанные месяцы.

[2] Может быть, вы слышали про необычную болезнь «коровье бешенство». При этой болезни (и родственных ей) некоторые белки организма приобретают аномальную пространственную структуру – например, α-спирали превращаются в β-слои – и не могут функционировать.

Окончание в следующем номере

МАГНИТНЫЕ ЦИФРЫ на МАГНИТНОЙ ДОСКЕ

Имеется магнитная доска и мешок магнитных цифр и двух магнитных знаков «+» и «=». Магнитные цифры и эти два знака можно прикреплять («примагничивать») к магнитной доске на пустые места.

а) Учительница составила на доске неверное равенство: $22 + 1 = 33$. Как переставить две цифры в этом равенстве, чтобы оно стало верным?

б) Учительница достала из мешка ещё одну тройку и составила новое неверное равенство: $22 + 1 = 333$. Как переставить в нём три цифры так, чтобы оно стало верным?

в) Наконец, учительница высыпала все остальные магнитные цифры из мешка. Всегда ли удастся, используя предыдущие шесть цифр (одну единицу, две двойки и три тройки) и все новые (неизвестные) цифры, составить какое-нибудь верное равенство на магнитной доске?

Автор Григорий Гальперин

Художник Елена Цветаева

НАИВНАЯ

Валерия Сирота

1. Почему вокруг деревьев снег в конце зимы протаивает быстрее?

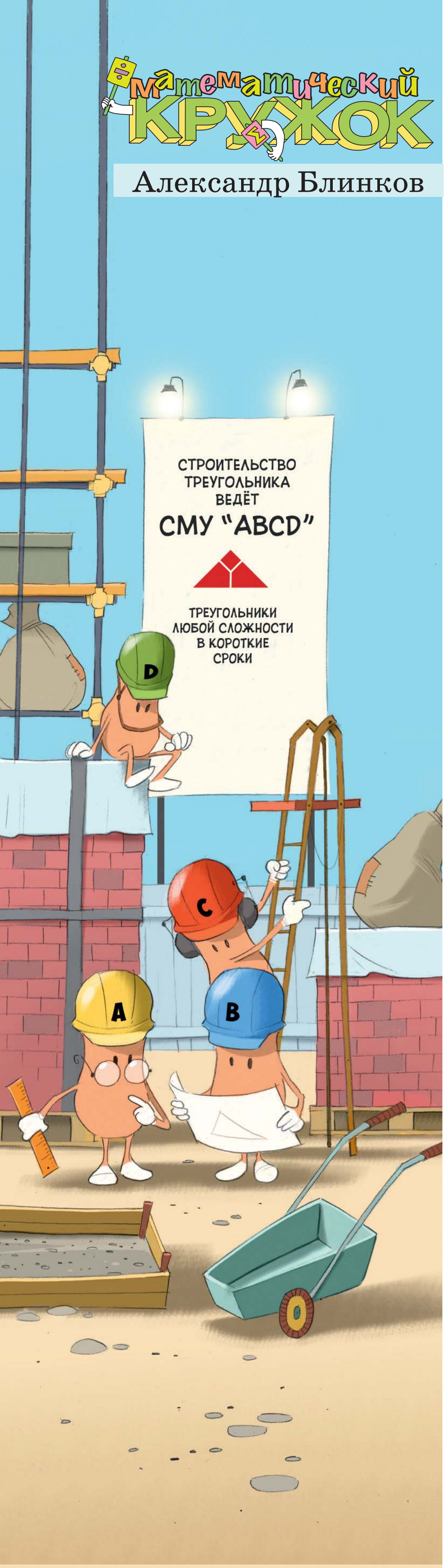
2. Бревно легче воды, а монетка тяжелее воды. Значит, монетка тяжелее бревна?

ФИЗИКА

3. Почему в космическом корабле нельзя открыть окно? А что же делать, если надо выйти наружу? Где на Земле применяется тот же принцип?

4. К лампочке всегда ведёт двойной провод (рядом две проволочки, разделённые изоляцией). Зачем?

Художник Мария Усеинова



Александр Блинков

Четвёртый признак равенства треугольников

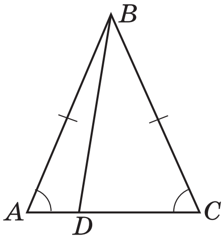


Рис. 1

В любом школьном учебнике геометрии вы найдёте три признака равенства треугольников. А верен ли четвёртый признак: по двум сторонам и углу, лежащему напротив одной из них? Не обязательно! Вот простой пример. Возьмём равнобедренный треугольник ABC. На его основании AC, но не посередине, отметим точку D (рис. 1). Тогда в треугольниках ABD и CBD сторона BD общая, $AB = CB$ и $\angle BAD = \angle BCD$, а треугольники не равны, так как $AD \neq CD$.

Но иногда признак работает, а если и нет, то между треугольниками есть связь. Чтобы в этом разобраться, решим задачу: восстановить треугольник ABC, если $AB = c$, $BC = a$ и $\angle BAC = \alpha < 90^\circ$.

Строим угол A, равный α, откладываем на одной из его сторон отрезок AB длины c и проводим окружность с центром B и радиусом a. Далее возможны три случая:

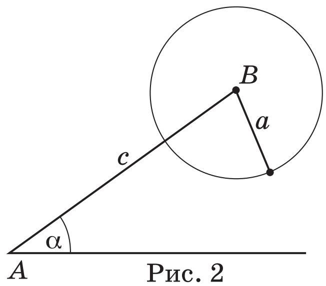


Рис. 2

1) Окружность не пересекает другую сторону угла. Тогда задача решений не имеет, и этот случай нам неинтересен.

2) Окружность касается другой стороны угла, тогда задача имеет единственное решение. Но и этот случай неинтересен, так как искомый треугольник – прямоугольный, а признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу хорошо известен.

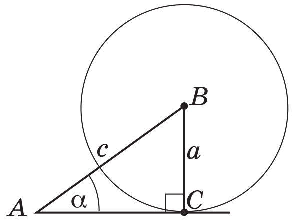


Рис. 3

3) Окружность пересекает прямую, содержащую сторону угла, в двух точках (рис. 4, a, $б$).

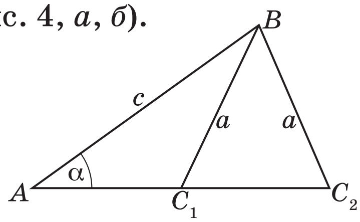


Рис. 4,a

Если окружность пересекает именно *сторону* угла, как на рисунке 4,a, мы получим два неравных треугольника, удовлетворяющих условию задачи: ABC_1 и ABC_2 (и признак не работает). Но отметим, что в этих треугольниках сумма углов C_1 и C_2 равна $180°$ (так как углы AC_1B и C_2C_1B смежные, а угол C_2C_1B равен углу C_1C_2B).

Если же окружность пересекает *продолжение стороны* угла, как на рисунке 4, *б*, задача имеет единственное решение: условию удовлетворяет только треугольник ABC_2 (и признак работает).

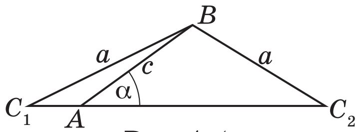


Рис. 4, *б*

Итак, мы доказали утверждение: **пусть две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого и равны углы напротив каких-то двух равных из этих сторон; тогда либо треугольники равны, либо сумма углов напротив двух других равных сторон равна 180°.**

Чтобы различить эти два случая, заметим, что $a < c$ на рисунке 4, *а* и $a > c$ на рисунке 4, *б*. Теперь можно сформулировать четвёртый признак равенства треугольников: **если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого и равны углы против больших из этих сторон, то такие треугольники равны.**

Упражнение 1. а) Объясните, почему можно не рассматривать случай $a = c$.

б) Рассмотрите случай, когда $\alpha \geqslant 90°$.

Упражнение 2. Угол BAC треугольника ABC равен $15°$. Можно ли однозначно определить сторону AC, если а) $AB = 3$, $BC = 4$; б) $AB = 4$, $BC = 3$? Ответ обоснуйте.

Применим полученные знания на практике.

Пример 1. Две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, и равны высоты, проведённые к одной паре равных сторон. Обязательно ли эти треугольники равны?

Ответ: не обязательно.

Решение. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC и его высоту BH. На продолжении стороны AC за вершину A отметим точку D так, что $AD = AC$ (рис. 5). Тогда в треугольни-

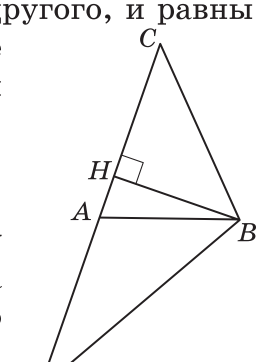
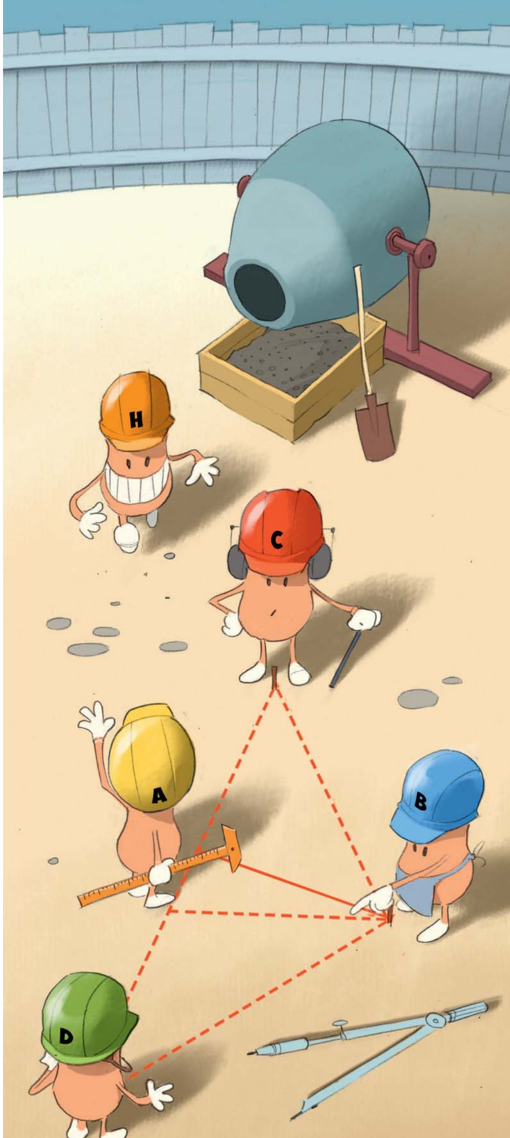
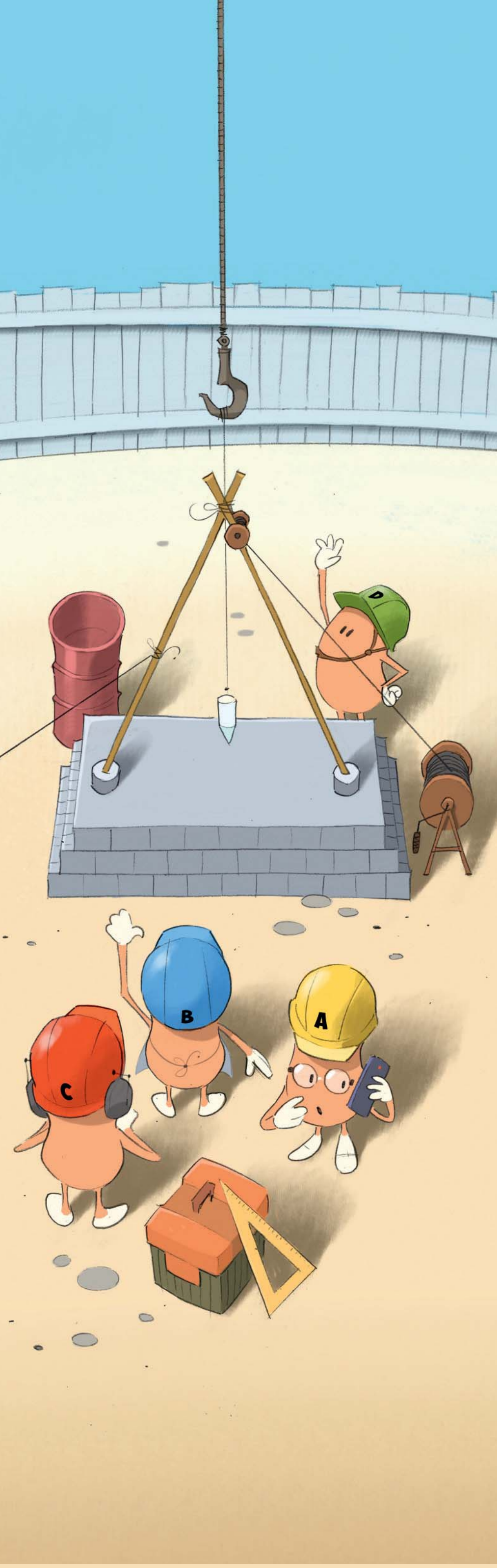


Рис. 5





ках ABC и ABD сторона AB общая, $AC = AD$ и к этим сторонам проведена общая высота. Но эти треугольники не равны, так как ABD – тупоугольный треугольник.

Упражнение 3. Изменится ли ответ, если равные высоты проведены к третьим сторонам?

Пример 2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ равны углы A и C и стороны AB и CD. Обязательно ли $ABCD$ – параллелограмм?

Ответ: не обязательно.

Решение. На рисунке 6 вы видите четырёхугольник, который получен из треугольника, изображённого на рисунке 1: мы «отрезали» треугольник BCD и приставили его к стороне BD в «перевёрнутом» виде. Тогда в четырёхугольнике $ABCD$ имеем: $\angle A = \angle C$ и $AB = CD$, но параллелограммом он не является, так как $BC \neq AD$.

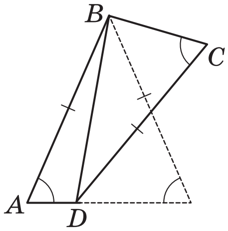


Рис. 6

Пример 3. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отмечена точка K так, что $\angle AKB = \angle BKC$. Докажите, что прямая BK проходит через середину стороны AC.

Решение. Так как BK – общая сторона треугольников AKB и CKB, из условия задачи следует, что либо эти треугольники равны, либо $\angle KAB + \angle KCB = 180°$ (рис. 7). Но второй случай противоречит теореме о сумме углов треугольника.

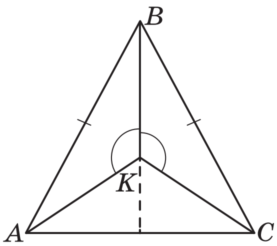


Рис. 7

Из равенства треугольников AKB и CKB следует, что луч BK – биссектриса угла ABC, тогда прямая BK содержит медиану треугольника ABC, то есть пересекает сторону AC в её середине.

Пример 4 (*Т. Казицына, Московская математическая олимпиада, 2003 год, 8 класс*). В треугольнике ABC на сторонах AC и BC отмечены такие точки X и Y, что $\angle ABX = \angle YAC$, $\angle AYB = \angle BXC$, $XC = YB$. Найдите углы треугольника ABC.

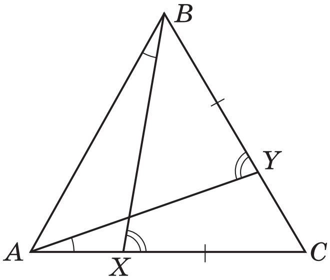


Рис. 8

Решение. Так как углы BXC и AYB внешние для треугольников ABX и CAY соответственно, то $\angle BAX = \angle BXC - \angle ABX = \angle AYB - \angle YAC = \angle YCA$ (рис. 8). Следовательно, треугольник ABC равнобедренный: $AB = BC$.

В треугольниках XBC и YAB имеем: $XC = YB$, $BC = AB$ и $\angle BXC = \angle AYB$. Кроме того, $YB < BC = AB$, значит, $XC < BC$. Так как равные углы лежат напротив больших из рассматриваемых сторон, то эти треугольники равны (по четвёртому признаку). Следовательно, $\angle BCX = \angle ABY$, тогда $AB = AC$. Таким образом, треугольник ABC – равносторонний, значит, каждый его угол равен 60°.

Обосновать, что из полученных равенств следует именно равенство треугольников, а не случай, когда $\angle XBC + \angle YAB = 180^\circ$, можно иначе:

$$\angle XBC + \angle YAB < \angle ABC + \angle CAB = 180^\circ - \angle ACB < 180^\circ.$$

Ответ: три угла по 60°.

Предлагаем несколько задач для самостоятельного решения. Часть из них можно решить, не используя фактов и приёмов, рассмотренных выше. Но если их использовать, решения будут наиболее короткими.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. На равных сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки E и D соответственно так, что $AD = CE$. Обязательно ли равны отрезки AE и CD?

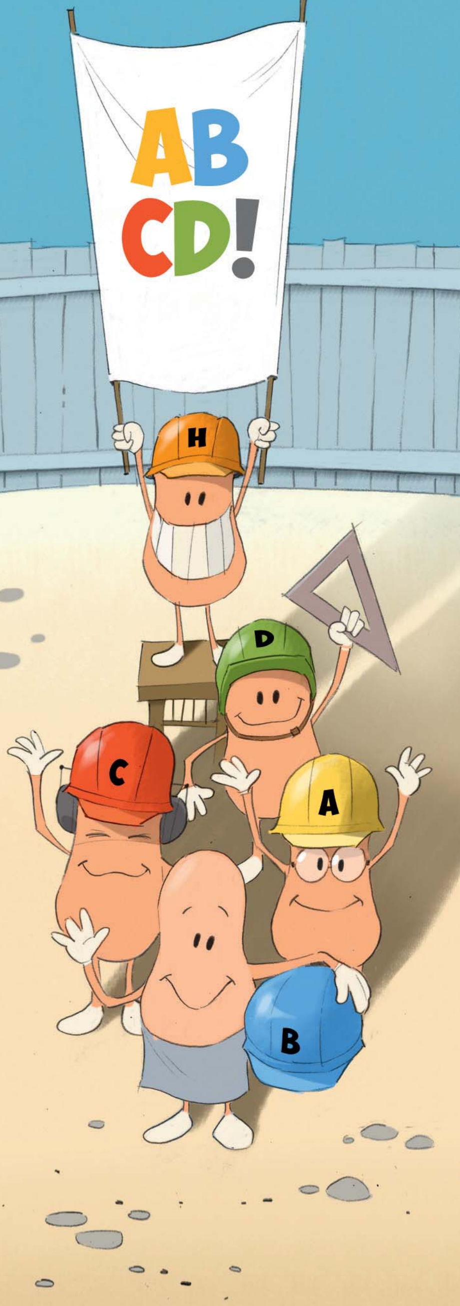
2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle C + \angle C_1 = 180^\circ$. Верно ли, что $\angle A = \angle A_1$?

3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка P так, что $AP = AB$. На стороне AB отмечена точка Q так, что $PQ = PB$. Докажите, что $AQ = CP$.

4. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AC за точку C – точка N, причём $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

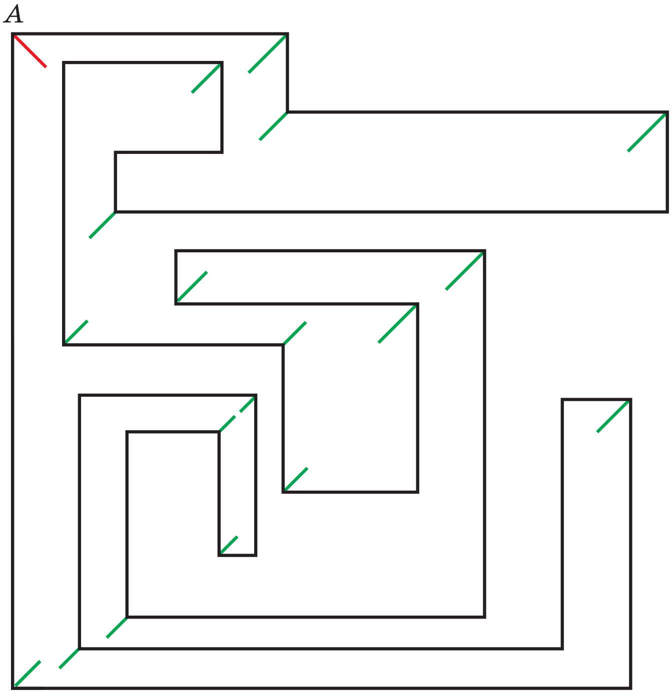
5 (*Е. Бакаев, Московская математическая олимпиада, 2019 год, 8 класс*). Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $AB = BC = CK$ и $\angle KAC = 30^\circ$. Найдите угол AKB.

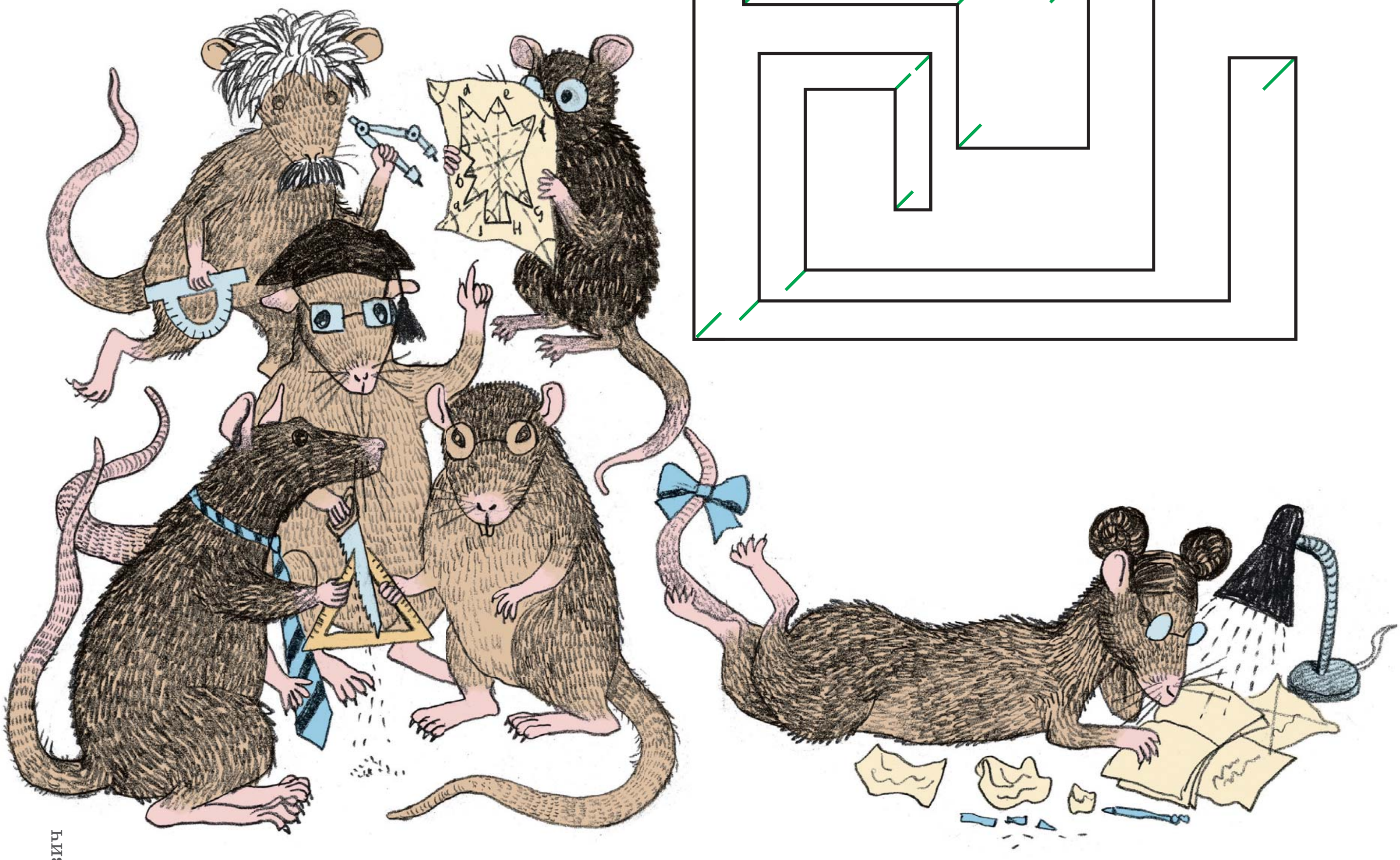
Художник Алексей Вайнер



ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ БИССЕКТРИСЫ

Дан многоугольник, у которого любые две соседние стороны перпендикулярны. Назовём две его вершины *не дружными*, если биссектрисы многоугольника, выходящие из этих вершин, перпендикулярны. Докажите, что для любой вершины количество не дружных с ней вершин чётно.





Эта задача предлагалась старшеклассникам на базовом туре XLI Турнира Городов; у неё есть несколько коротких и красивых решений. Рисунок мы привели для примера (зелёным показаны биссектриссы вершин, не дружных с вершиной A), нужно найти решение для всех случаев. Попробуйте!

Авторы Михаил Скопенков, Алексей Заславский

Художник Артём Костюкевич

XLI ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ

13 и 27 октября 2019 года состоялся осенний тур XLI Турнира Городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим базовый и сложный варианты для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов (баллы за пункты одной задачи суммируются).

Базовый вариант

1 (4 балла). Фокусник выложил в ряд колоду из 52 карт (рубашками вверх) и объявил, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф фокусник может гарантировать успех фокуса? (Где лежит тройка треф, фокусник знает.)

Алексей Воропаев

2 (4 балла). Дана окружность ω с центром O и две её различные точки A и C. Для любой другой точки P на ω отметим середины X и Y отрезков AP и CP и построим точку H пересечения высот треугольника OXY. Докажите, что положение точки H не зависит от выбора точки P.

Артемий Соколов

3 (4 балла). В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно три фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке?

Егор Бакаев

XLI ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР, 8-9 КЛАССЫ

4 (5 баллов). Даны целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$. По кругу записаны их квадраты $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_{1000}^2$. Сумма любых 41 подряд идущих чисел на круге делится на 41^2. Верно ли, что каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ делится на 41?

Борис Френкин

5 (6 баллов). У Васи есть неограниченный запас брусков $1\times1\times3$ и уголков из трёх кубиков $1\times1\times1$. Вася целиком заполнил ими коробку $m\times n\times k$, где m, n и k – целые числа, большие чем 1. Докажите, что можно было обойтись лишь уголками.

Михаил Евдокимов

Сложный вариант

1. Назовём *сложностью* целого числа $n>1$ количество сомножителей в его разложении на простые (например, сложность чисел 4 и 6 равна 2). Для каких n все числа между n и $2n$ имеют сложность

а) (2 балла) не больше, чем у n;

б) (2 балла) меньше, чем у n?

Борис Френкин

2 (7 баллов). Два остроугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что точки B_1 и C_1 лежат на стороне BC, а точка A_1 лежит внутри треугольника ABC. Пусть S и S_1 – соответственно площади этих треугольников. Докажите, что

$$\frac{S}{AB+AC} > \frac{S_1}{A_1B_1+A_1C_1}.$$

Наири Седракян, Илья Богданов

3 (7 баллов). Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 грамма, серебряные – по 2 грамма, медные – по 1 грамму. Как на чашечных весах без гирек гарантированно определить тип у всех монет не более чем за 101 взвешивание?

Владислав Новиков

4 (7 баллов). Из центра O описанной окружности треугольника ABC опустили перпендикуляры OP и OQ на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B. Докажите, что прямая PQ делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон CB и AB.

Артемий Соколов

5 (8 баллов). Назовём пару $(m,\ n)$ различных натуральных чисел m и n *хорошей*, если числа mn и $(m+1)\cdot(n+1)$ – точные квадраты. Докажите, что для каждого натурального m существует хотя бы одно такое натуральное $n > m$, что пара $(m,\ n)$ хорошая.

Юрий Маркелов

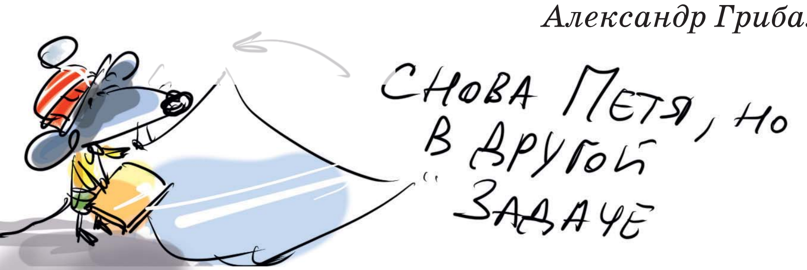
6 (8 баллов). У Пети было несколько сторублёвок, других денег не было. Петя стал покупать книги (каждая книга стоит целое число рублей) и получать сдачу мелочью (монетами в 1 рубль). При покупке дорогой книги (не дешевле 100 рублей) Петя расплачивался только сторублёвками (минимальным необходимым их количеством), а при покупке дешёвой (дешевле 100 рублей) расплачивался мелочью, если хватало, а если не хватало – сторублёвкой. К моменту, когда сторублёвок не осталось, Петя потратил на книги ровно половину своих денег. Мог ли Петя к этому моменту потратить на книги хотя бы 5 тысяч рублей?

Татьяна Казицына

7 (10 баллов). На одной стороне плоской деревянной пластинки нарисован клетчатый квадрат, в нём 102 клетки намазаны чёрной краской. Петя, используя пластинку как печать, 100 раз приложил её к белому листу, и каждый раз эти 102 клетки (и только они) оставляли чёрный отпечаток на бумаге. Мог ли в итоге на листе получиться квадрат 101×101, все клетки которого, кроме одной угловой, чёрные?

Александр Грибалко

Художник Сергей Чуб



КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

В этом номере мы подводим итоги прошлогоднего конкурса по русскому языку.

ПОБЕДИТЕЛЯМИ СТАЛИ

Костиков Владислав	Самара	гимназия № 2	4 кл.
Ларионова Елена	Калининград	гимназия № 32	5 кл.
Степина Алиса	Москва	школа № 548	6 кл.
Сухих Эдуард	Сочи	школа № 78	8 кл.

ПОЗДРАВЛЯЕМ ПРИЗЁРОВ КОНКУРСА

Еремеева Софья	Петрозаводск	Державинский лицей	9 кл.
Линиченко Дарья	Москва	школа № 1543	8 кл.
Олейникова Ульяна	Черкесск	школа № 3	4 кл.
Рябова Мария	Москва	школа № 192	7 кл.
Советкин Глеб	Москва	школа № 1210	6 кл.
Тужик Ольга	Москва	школа № 179	11 кл.
Тюков Даниил	п. Новый Свет, Ленинградская обл.	«Пригородная школа»	9 кл.
Юлов Василий	Санкт-Петербург	лицей № 150	6 кл.

КРОМЕ ТОГО, МЫ ОТМЕЧАЕМ СЛЕДУЮЩИХ УЧАСТНИКОВ

Виденичева Марьяна	Санкт-Петербург	школа № 137	4 кл.
Нехаева Екатерина	Москва	школа № 179	7 кл.
Черкашин Лев	Омск	школа № 107	5 кл.

И БЛАГОДАРИМ ВСЕХ ОСТАЛЬНЫХ УЧАСТНИКОВ КОНКУРСА!

СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРЕМИЕЙ ЗА ЛУЧШЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ IV ТУРА НАГРАЖДАЕТСЯ

Сухих Эдуард	Сочи	школа № 78	8 кл.

Мы начинаем конкурс 2020 года! Победителей ждут призы. Предусмотрены специальные премии за лучшее решение отдельных туров. Решения I тура отправляйте по адресу ruskonkurs@kvantik.org **не позднее 1 марта**. В письме кроме имени и фамилии укажите ваш город, а также школу и класс, где вы учитесь. Предлагайте на конкурс задачи собственного сочинения – лучшие будут опубликованы.

Желаем успеха!

I ТУР

1. Какой предмет, необходимый многим людям для лучшего восприятия окружающего мира, в некоторых севернорусских говорах называют *близнецами*?

С. В. Дьяченко

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Материал подготовил Илья Иткин

2. Из названия страны *Боливия* можно, отбросив две первые буквы, получить название другой страны – *Ливия**. Разумеется, тем же свойством обладают и прилагательные, образованные от названий этих стран: *боливийский* – *ливийский*. Найдите названия двух стран такие, что:

– прилагательные, образованные от этих названий, обладают тем же свойством;

– сами названия стран этим свойством ***не*** обладают.

И.Б. Иткин

3. Одну пожилую женщину её родные называли *Бари́на*. Как было её настоящее имя? Кто из членов семьи первым стал так её называть?

Л.З. Иткина

4. – Мне на день рождения деревянную АЛЬФУ подарили! – похвастался Вовочка своей подруге Машеньке.

– Как это так: «деревянную АЛЬФУ»?! – рассмеялась Машенька. – Если АЛЬФУ, значит, уж точно не деревянную!

Вовочка сказал правду, хотя, если подумать, удивление Машеньки можно понять. Какое сочетание из двух слов мы заменили на «АЛЬФА»?

К.В. Литвинцева

5. Если понимать значение этого прилагательного буквально, можно сказать, что люди обычно становятся ТАКИМИ к концу первого года жизни. В действительности некоторые люди, к сожалению, не становятся по-настоящему ТАКИМИ никогда. Какое прилагательное мы заменили на ТАКОЙ?

С.И. Переверзева

* См. «Квантик», №6, 2015, с. 27.

Художник Николай Крутиков

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, IV ТУР
(«Квантик» № 10, 2019)

16. *После одного примечательного случая разбойник Мерзавио очень полюбил игру слов. «Не буду-ка я больше спрашивать "Кошелёк или жизнь?", – решил он однажды. – Буду лучше спрашивать "АЛЬФА или БЕТА?": смысл, в общем, тот же самый, зато как красиво – слова отличаются только последней буквой». Как стал звучать вопрос Мерзавио?*

Вопрос «Кошелёк или жизнь?» означает нечто вроде «Отдавай деньги, или мы отправим тебя на тот свет!» Полюбив игру слов, находчивый Мерзавио заменил этот вопрос вопросом **«Казн<u>а</u> или казн<u>ь</u>?»**: смысл, действительно, получался примерно тот же самый.

Добавим, что участники конкурса предложили свой вариант вопроса, мало чем уступающий варианту Мерзавио: **«Гро<u>б</u> или гро<u>ш</u>?»**

17. *В написанной в начале XVII века «Грамматике» Мелетия Смотрицкого о знаменитом византийском церковном деятеле Николае Студите говорится: «От юныя версты предаста его родителя учитися книгам». Что здесь означает слово «верста»? Какое слово современного русского языка вы можете привести в подтверждение? Кратко поясните ответ.*

Приведённая фраза, очевидно, значит «С юного … родители отдали его учиться книгам (то есть грамоте)». По контексту понятно, что слово *верста* имеет здесь значение **«возраст»**. Подтверждением этой догадки может служить слово ***сверстник*** – «человек (примерно) одного возраста с кем-то».

18. *Первоначальное значение каждого из этих слов можно передать примерно как «Ходил столько-то раз». Напишите любое из этих слов.*

Эти слова – наречия ***дважды***, ***трижды***, ***четырежды***; в древнерусском языке они выглядели как *дъвашьды* и т.д. Часть *-шьды* происходит от корня *-шед-* со значением «ходить» (ср. *шедший*).

19. *«Почему по-русски, когда хотят наотрез отказаться от какого-нибудь предложения, говорят "______________!"? Это же означает "Даю больше, добавляю!"!» – с удивлением спросил иностранец Джон, не очень давно начавший учить русский язык. Заполните пропуск.*

Джона удивило выражение **«Вот ещё!»**. Это выражение действительно может значить «Даю больше, добавляю!» (*– Ты уже съел весь мёд и всё сгущённое молоко? Не огорчайся, вот ещё!*), но куда чаще оно используется в качестве не слишком вежливого способа выразить категорический отказ: *– Хочешь пойти со мной на олимпиаду по математике? – Вот ещё!*

20. *Один маленький мальчик рассказывает: «Заглавные – это такие маленькие-маленькие послушные буковки...»*

– Почему же ты думаешь, что заглавные буквы – маленькие и послушные?

– Ну как же: заглавные буквы – это такие, которые идут...

Закончите объяснение мальчика двумя словами.

Как нередко бывает в случае детских «этимологических гипотез», герой задачи рассуждал по-своему вполне логично: «Заглавные – это такие маленькие-маленькие послушные буковки, которые идут **за главной**» (подходят также ответы «...за главным» и «...за главными»).

НАШ КОНКУРС, III ТУР
(«Квантик» № 11, 2019)

11. *Семь камней весом 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 тонн можно перевезти в нескольких грузовиках одинаковой грузоподъёмности. Хватит ли для перевозки четырёх таких грузовиков?*

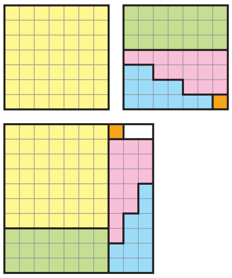
Ответ: да. Камень в 7 тонн помещается в грузовике, поэтому грузоподъёмность каждого грузовика – хотя бы 7 тонн. Поместим в 1-й грузовик камни в 1 и 6 тонн, во 2-й – 2 и 5 тонн, в 3-й – 3 и 4 тонны, а в 4-й – один камень в 7 тонн.

12. *Петя и Вася тренируются на кольцевом велотреке: одновременно стартовали из одной и той же точки и едут с постоянными скоростями. Петя едет быстрее Васи. Когда Петя прошёл 16 кругов, он встретил в точке старта Васю. А когда Вася прошёл 16 кругов, он встретил в точке старта Петю. Верно ли, что Вася после каждого круга встречал в точке старта Петю?*

Ответ: да. Пусть за 16 кругов Пети Вася прошёл a кругов, а за 16 кругов Васи Петя прошёл b кругов. Отношение их скоростей равно $16/a = b/16$, то есть $ab = 16 \cdot 16 = 2^8$, откуда оба числа a и b – степени двойки. Петя едет быстрее Васи, поэтому $b > 16$. Значит, b делится на 16. Пока Вася проезжает 1 круг, Петя проезжает $b/16$ кругов и оказывается в точке старта.

13. *У Саши есть два клетчатых квадрата 7×7. Ему нужно разрезать их по линиям сет-*

ки на части так, чтобы частей получилось не более пяти и их можно было уложить в один слой в коробку 10 × 10. Есть ли способ выполнить это задание?



Ответ: да, см. рисунок. Решите ту же задачу, чтобы получилось 4 части.

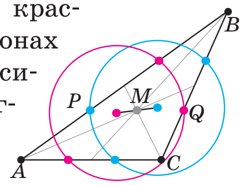
14. *Квантик и Ноутик загадали по натуральному числу и сказали их Серёже. Серёжа в ответ назвал число 2020 и сказал, что это либо сумма, либо произведение услышанных им чисел. Ноутик подумал и сказал, что не знает, какое число загадал Квантик. Квантик услышал это, но всё равно не смог узнать, какое число загадал Ноутик. Какое число загадал Квантик?*

Ответ: 1010. Числа, загаданные Квантиком и Ноутиком – делители 2020, иначе было бы понятно, что 2020 – это сумма, а не произведение, и по одному загаданному числу можно было бы восстановить другое. Также ясно, что ни у кого число не равно 2020, а значит, оба числа не превышают 1010 (они в целое число раз меньше 2020, то есть хотя бы в 2 раза меньше).

Квантик всё это мог установить по ответу Ноутика, но всё равно не определил число Ноутика. Значит, он не знал, 2020 – сумма или произведение загаданных чисел. Но 2020 могло быть суммой загаданных чисел, только если оба равны 1010, так что число Квантика равно 1010.

15. *На каждой из сторон треугольника ABC выбраны красная и синяя точки так, что красная точка делит сторону в отношении 2:1, а синяя – в отношении 1:2 (если обходить треугольник по часовой стрелке). Через красные точки провели окружность, и через синие – тоже. Докажите, что отрезок, соединяющий центры этих окружностей, проходит через точку пересечения медиан треугольника ABC.*

Пусть M – точка пересечения медиан ABC. Докажем, что точки на сторонах ABC разбиваются на пары «красная – синяя», где точки в паре симметричны относительно M. В итоге «красный» треугольник (с красными вершинами на сторонах ABC) будет симметричен «синему» относительно M, а тогда симметричны и окружности, и их центры.

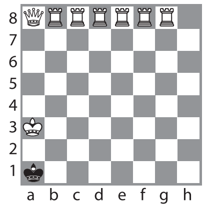


Итак, рассмотрим одну пару – точки P и Q на рисунке (остальные случаи аналогичны). Каждая делит свою сторону в отношении 2:1, считая от вершины B, но и M делит медиану, выходящую из B, в том же отношении. По обратной теореме Фалеса прямые PM и QM параллельны AC, откуда P, M и Q лежат на одной прямой. Кроме того, отрезки PM и MQ оба в 1,5 раза меньше половины AC, то есть равны. Это и значит, что P и Q симметричны относительно M.

ТРИ ШАХМАТНЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ

(«Квантик» № 12, 2019)

Семь шагов короля. Один из возможных ответов дан справа. Мат ставится так:



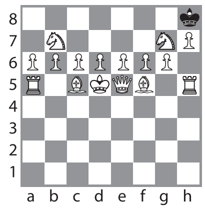
1. Кр a3-b3+ Кр a1-b1
2. Кр b3-c3+ Кр b1-c1

…

7. Кр g3-h3 ×

Белый король прогуливается по третьей горизонтали, а несчастный чёрный король обречённо плетётся за ним, прячась в его «тени» от неумолимых шахов. И так до рокового финала…

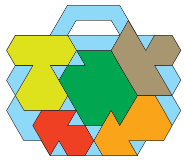
Все на одного! Один из ответов см. справа. Ферзь и король поменялись местами не случайно – это необходимо в случае первого хода белых пешкой на f7. В итоге любой ход белых приводит к пату.



Ищи «вторую половинку». Фраза оканчивается так: «… а потому не следует их поощрять».

КОРЗИНА ГРИБОВ

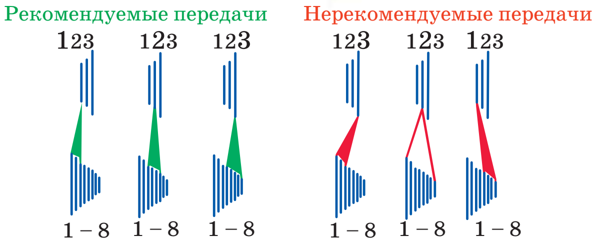
(«Квантик» № 12, 2019)



ВЕЛОСИПЕДНЫЕ ЗВЁЗДОЧКИ

(«Квантик» № 12, 2019)

На рисунке схематически изображены звёздочки велосипеда. На педали они увеличиваются слева направо (верхняя часть рисунка), а на колесе – справа налево (нижняя часть). Так сделано, чтобы любую передачу (скорость) можно было включить, не перекашивая цепь. Скажем, две самые левые звёздочки (маленькая у педали и большая у колеса) – едем очень медленно, две самые правые – едем очень быстро. Эти и близкие к ним варианты отмечены зелёным. А красные варианты не нужны – тот же эффект даёт один из «зелёных» способов.



Но если бы возрастание звёздочек на педали и колесе шло в одну сторону, то для установки некоторых скоростей пришлось бы перекашивать цепь, и она бы больше изнашивалась и слетала.

МАГНИТНЫЕ ЦИФРЫ НА МАГНИТНОЙ ДОСКЕ

а) $2^3 + 1 = 3^2$. б) $2^3 + 1^3 = 3^2$. в) Да: надо взять равенство из пункта б) и все оставшиеся цифры поставить за тройкой в показателе степени у 1.

НАИВНАЯ ФИЗИКА

1. Тёмные стволы деревьев быстрее нагреваются на солнце, чем белый снег, и начинают греть то, что вокруг них (уже не излучением, а просто теплообменом). А почему стволы быстрее нагреваются? Потому что любая тёмная поверхность поглощает бóльшую часть всех падающих на неё лучей – оттого она и кажется нам тёмной. Идеально чёрная поверхность поглощала бы все лучи, ничего бы не отражала, и нам в глаза от неё ни один лучик света не попадал бы. А белая поверхность, в том числе и снег, – наоборот, отражает почти все лучи. Посветишь на неё жёлтым цветом – она покажется жёлтой, посветишь красным – красной… Это свойство всё отражать мы и называем: белый цвет.

2. Бревно легче не вообще какой-то воды, а такого количества воды, которое занимает одинаковый с ним объём. (Поэтому оно не тонет: оно погружается в воду настолько, чтобы вытесненная им вода весила столько же, сколько всё бревно.) А монетка тяжелее такого количества воды, которое помещается в её объёме, то есть гораздо меньшего. Так что всё в порядке.

Чтобы не возиться с объёмами, нужно сравнивать не вес, а плотность, то есть массу в единице объёма. Когда говорят «бревно легче воды», это как раз значит, что плотность у него меньше плотности воды. А у монетки – больше.

3. Если открыть окно, воздух из корабля тут же улетучится наружу – ведь снаружи нет воздуха; внутри давление атмосферное, а снаружи – ноль. Поэтому вместо окон – намертво запаянные, прочные иллюминаторы. А вместо двери – шлюз: две герметично закрывающиеся двери на небольшом расстоянии друг от друга. Когда нужно выйти (или войти), сначала открывают одну дверь, выходят в отсек между дверьми и первую дверь запирают. Потом уже открывают вторую.

На Земле так устроены шлюзы на судоходных реках: в местах, где большой перепад высот, в обход перекатов строят канал с двумя воротами. Когда открыты верхние ворота, уровень воды в канале высокий, и в него заходят суда, идущие сверху вниз по течению. Затем верхние ворота закрывают, воду из канала сливают через небольшое отверстие – уровень воды падает, и тогда открывают нижние ворота, корабль плывёт дальше.

А в сельских домах давным-давно помогали беречь тепло «шлюзы» – сени и двойные двери.

4. Лампочка горит потому, что через неё проходит электрический ток (то есть заряженные частицы). Вот и нужно два провода: по одному ток втекает, по другому – вытекает!

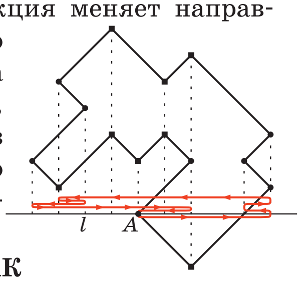
На самом деле всё сложнее. В электросети в домах – и в розетках, и в лампочках – ток не постоянный, а переменный. Это значит, что заряженные частицы (электроны) не «бегут» всё время в одну сторону по проводу, а «дёргаются» туда-сюда. Сто раз в секунду (буквально!) ток меняет направление движения на противоположное. Но всё равно, чтобы ток в каждый момент куда-то тёк, нужен перепад напряжения на двух концах нити накаливания – как перепад высот в реке нужен, чтобы вода в ней текла, а не стояла на месте. Между двумя проводами, ведущими к лампочке, всегда есть этот перепад. Он и заставляет ток течь через лампочку.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ БИССЕКТРИСЫ

Решение 1. Расположим многоугольник так, чтобы его стороны были горизонтальны и вертикальны. Все вершины многоугольника делятся на 4 типа: ┌, ┐, └, ┘. Докажем, что суммарное число вершин типа 2 и 3 чётно (и 1 и 4 тоже). Отсюда будет следовать утверждение задачи: можно считать, что нам дана вершина A типа 1, а тогда не дружные с ней – вершины типа 2 и 3.

Пусть вертикальных сторон k, тогда горизонтальных сторон тоже k. У любой горизонтальной стороны правый конец может быть только типа 2 или 4. Всего левых вершин у горизонтальных сторон столько же, сколько самих сторон, то есть k, откуда суммарное число вершин типа 2 и 4 равно k. Пусть вершин типа 2 всего x, тогда вершин типа 4 всего $k-x$. Рассматривая нижние концы вертикальных сторон, получаем аналогично, что вершин типа 3 и 4 всего k, откуда вершин типа 3 всего $k-(k-x)$, то есть x. Но тогда вершин типа 2 и 3 всего $2x$ (чётное число), а это и есть вершины, которые не дружны с A.

Решение 2. Расположим многоугольник так, чтобы биссектриса l данной вершины A была горизонтальна. Пусть некая точка движется по периметру многоугольника с постоянной скоростью, начав и закончив в вершине A. Тогда её проекция на l также движется с постоянной скоростью, причём проекция меняет направление движения ровно в те моменты, когда точка проходит через вершину, дружную с A, или через саму A. Учитывая, что всего вершин чётное число, получаем требуемое.



ЧЕТВЁРТЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Упражнение 1. В обоих пунктах треугольник определяется однозначно, так как:

а) для равенства равнобедренных треугольников достаточно равенства боковых сторон и любой пары соответствующих углов;

б) угол, равный α, заведомо лежит напротив большей стороны треугольника.

Упражнение 2. Ответ: а) да; б) нет.

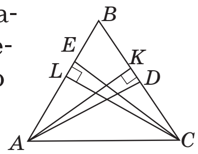
а) Все треугольники со сторонами 3 и 4 и углом 15°, лежащим напротив большей из данных сторон, между собой равны.

б) Заданный угол лежит напротив меньшей из данных сторон, поэтому есть два неравных треугольника, удовлетворяющих условию.

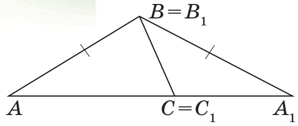
Упражнение 3. Ответ не изменится. Например, можно на рисунке 2, *а* провести из вершины B общую высоту треугольников ABC_1 и ABC_2.

Задачи для самостоятельного решения

1. Ответ: нет. Рассмотрим, например, равносторонний треугольник ABC и проведём его высоты AK и CL (см. рисунок). На отрезках BL и CK отметим точки E и D соответственно так, что $EL=DK$. Тогда прямоугольные треугольники AKD и CLE равны (по двум катетам), поэтому $AD=CE$. Но AE больше половины боковой стороны треугольника, а CD – меньше, то есть $AE>CD$.

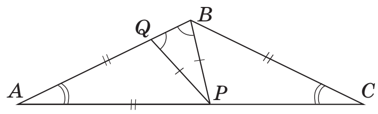


2. Ответ: верно. Приложим данные треугольники друг к другу так, чтобы совпали вершины B и B_1, C и C_1, а вершины A и A_1 оказались в разных полуплоскостях относительно прямой BC (см. рисунок). Так как $\angle C+\angle C_1=180°$, точки A, C и A_1 лежат на одной прямой. Значит, получился равнобедренный треугольник ABA_1, в котором углы A и A_1 при основании равны.

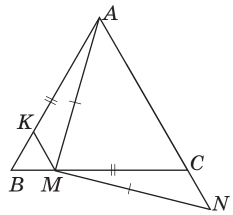


Доказанное утверждение в каком-то смысле обратно к общему утверждению из статьи.

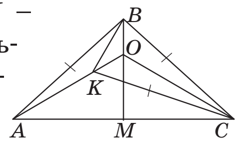
3. Из условия следует, что $BC=AB=AP$ и $\angle BCA=\angle BAC$ (см. рисунок). Докажем равенство треугольников AQP и CPB, из которого и будет следовать, что $AQ=CP$. В этих треугольниках $AP=BC$ и $QP=PB$. Так как $\angle QAP=$ $=\angle PCB$, то либо треугольники AQP и CPB равны, либо $\angle AQP+\angle CPB=180°$. Но второй случай невозможен, поскольку $\angle AQP>90°$ как внешний угол при основании BQ равнобедренного треугольника BPQ, а $\angle CPB>90°$ как внешний угол при основании BP равнобедренного треугольника BAP.



4. Через точку M проведём прямую, параллельную AC, которая пересечёт AB в точке K (см. рисунок). Тогда треугольник BMK тоже равносторонний, откуда $\angle AKM=$ $=120°=\angle MCN$. Кроме того, $AM=MN$ и $AK=AB-BK=AC-BM=MC$. Так как углы AKM и MCN – тупые, то треугольники AKM и MCN равны по четвёртому признаку. Следовательно, $BM=CN$.



5. Ответ: 150°. Пусть BM – высота и медиана треугольника ABC, которая пересекает прямую AK в точке O (см. рисунок). Треугольник AOC также равнобедренный, поэтому $\angle MOC=$ $=\angle MOA=60°$. Значит, $\angle BOC=120°=\angle KOC$, откуда треугольники BOC и KOC равны (по четвёртому признаку). Значит, $OB=OK$, тогда $\angle OKB=\angle OBK=30°$ и $\angle AKB=150°$.



Отметим, что K обязана лежать между A и O – иначе угол CKB был бы тупым, а это угол при основании равнобедренного треугольника.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач V тура, с которыми справитесь, не позднее 1 февраля в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

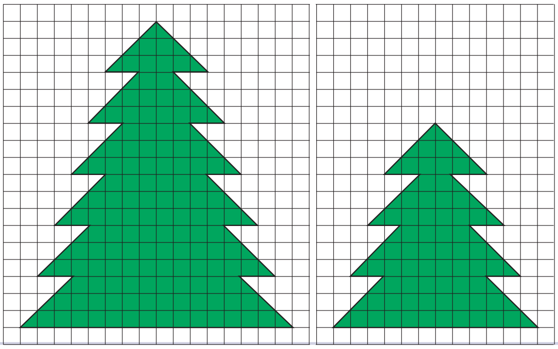
V ТУР

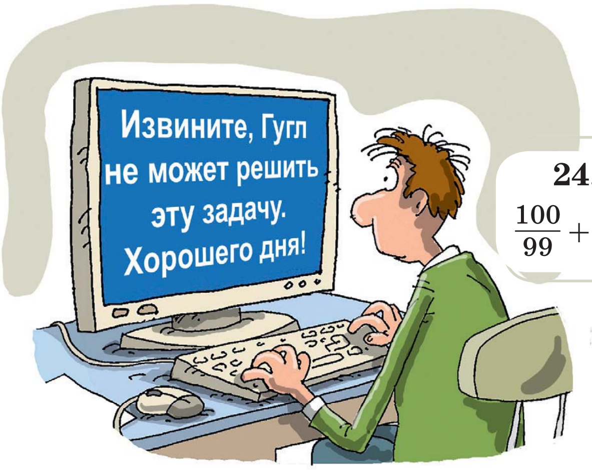
21. Барон Мюнхгаузен огородил свои владения забором в форме шестиугольника. Он утверждает, что каждый внутренний угол этого шестиугольника либо меньше 10°, либо больше 350°. Может ли барон быть прав?

22. Вася написал на листке 10 цифр (среди них могут быть равные) так, чтобы сумма любых трёх написанных цифр не превосходила 14. Какова наибольшая возможная сумма всех 10 цифр? (Приведите пример и докажите, что большую сумму получить нельзя.)

Авторы: Александр Перепечко (21), Павел Кожевников (22), Николай Авилов (23), Григорий Мерзон (24), Николай Чернятьев (25)

23. Ёлочку на рисунке слева разрежьте на четыре части и сложите из них две одинаковые ёлочки, как на рисунке справа.





24. Вычислите сумму

$$\frac{100}{99}+\frac{100\cdot 98}{99\cdot 97}+\frac{100\cdot 98\cdot 96}{99\cdot 97\cdot 95}+\ldots+\frac{100\cdot 98\cdot 96\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{99\cdot 97\cdot 95\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}.$$

25. Квантик и Ноутик по очереди закрашивают клетки на доске 8×8, по одной клетке за ход, начинает Квантик. Первый ход можно сделать куда угодно. Каждый следующий ход должен быть таким, что новая клетка граничит по стороне ровно с одной закрашенной клеткой. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто может обеспечить себе победу?

Художник Николай Крутиков

ПЕРЕНЕСТИ СТОЛ

Справа изображён фрагмент плана квартиры (сторона клетки 0,5 м). Как пронести из коридора в комнату стол с ножками длины 1 м и столешницей 1 м × 1,5 м, если проход в комнату чуть у́же 1 м? Все двери распахиваются до конца.

Автор Максим Прасолов

Художник Ольга Демидова

ISSN 2227-7986 20001